



## แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8

รหัสวิชา ค20209 รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

หน่วยที่ 2 ทักษะและกระบวนการพื้นที่ผิวและปริมาตร

เรื่อง พื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิดและกรวย

ผู้สอน นางสาวนทพร สถาพรพิทักษ์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ภาคเรียนที่ 2/2565

จำนวน 2 คาบ

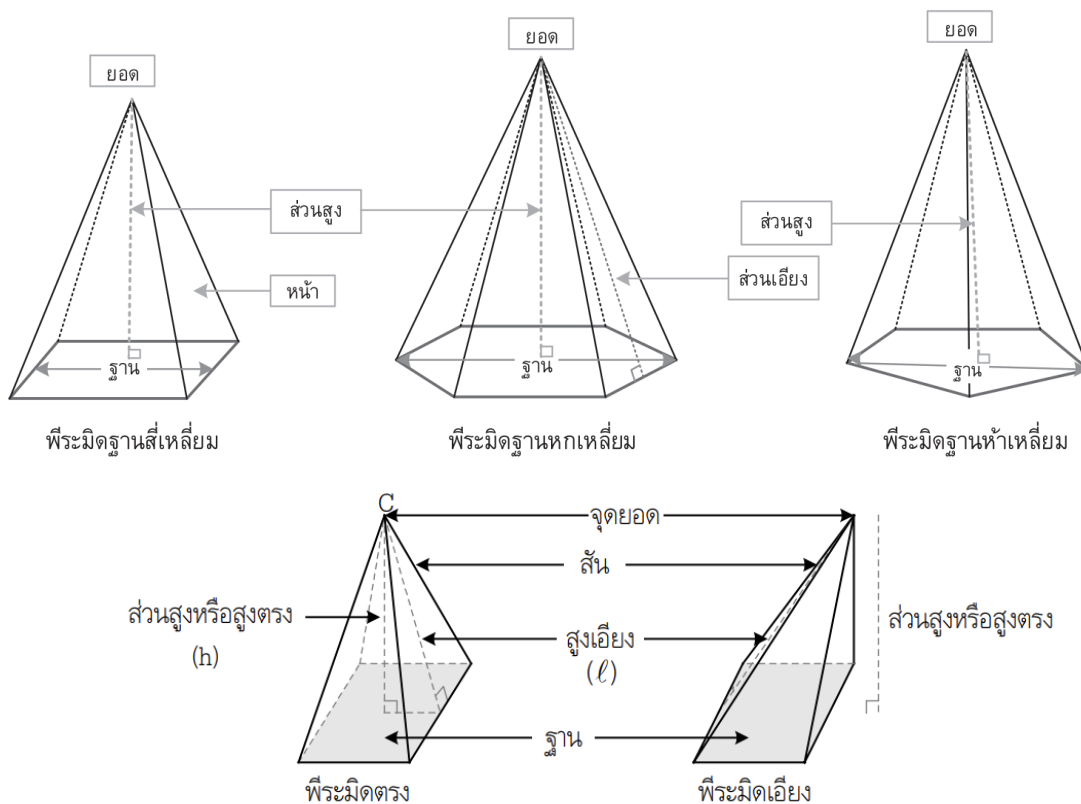
อาจารย์พีเลี้ยง อาจารย์พีรวิชญ์ ราชสาร

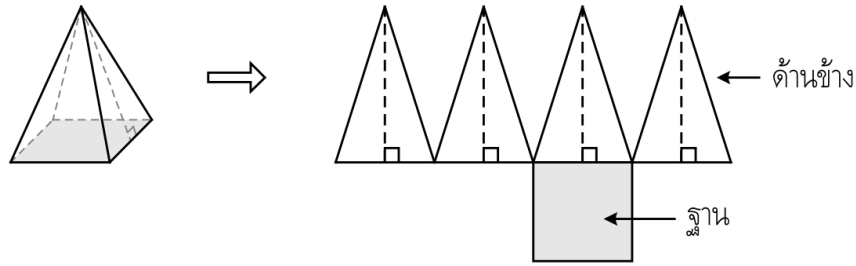
### 1. ผลการเรียนรู้

ประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับพื้นที่ผิวและปริมาตรในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตจริง

### 2. สารสำคัญ

**พีระมิด** คือ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีฐานเป็นรูปเหลี่ยมใดๆ มียอดแหลมที่ไม่อยู่บนระนาบเดียวกับฐาน และหน้าทุกหน้าเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดรวมกันที่ยอดแหลมนั้น ตัวอย่างดังรูป

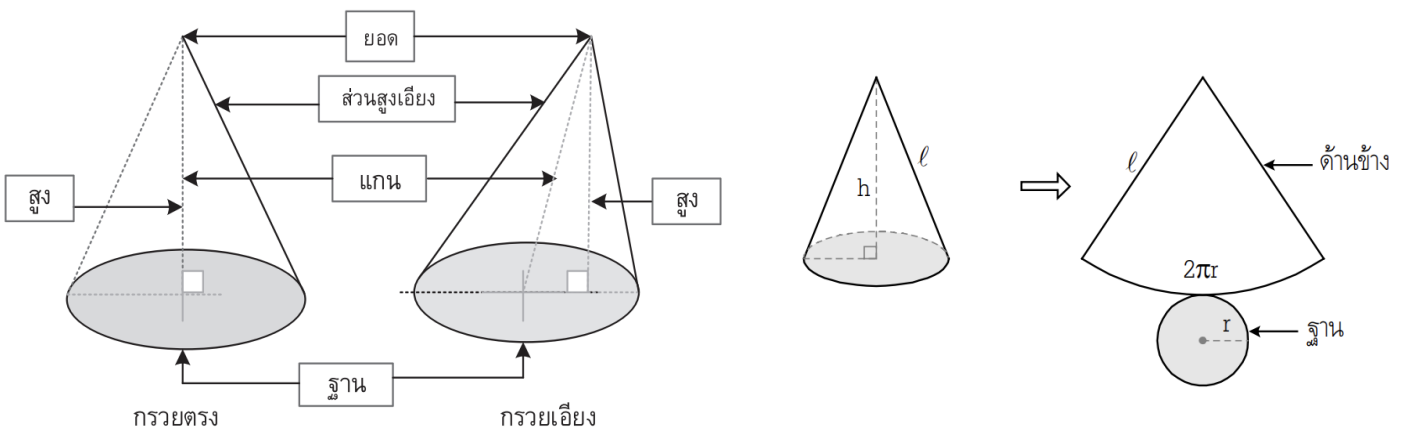




$$\text{พื้นที่ผิวของพีระมิด} = \text{พื้นที่ฐาน} + \text{พื้นที่ผิวข้าง}$$

$$\text{ปริมาตรของพีระมิด} = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง}$$

**กรวย** คือ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีฐานเป็นวงกลม มียอดแหลมที่ไม่อยู่บนระนาบเดียวกับฐาน และเส้นที่ต่อระหว่างจุดยอดและจุดใดๆ บนขอบของฐานเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง ตัวอย่างดังรูป



$$\text{พื้นที่ผิวของกรวย} = \pi r^2 + \pi r l$$

$$\text{ปริมาตรของกรวย} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

### 3. จุดประสงค์การเรียนรู้

#### 3.1 ด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์:

3.1.1 นักเรียนสามารถหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิดได้

3.1.2 นักเรียนสามารถหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของกรวยได้

#### 3.2 ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์:

นักเรียนสามารถสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาเกี่ยวกับพื้นที่ผิวและปริมาตรของรูปทรงที่กำหนดให้ได้

### 3.3 ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์: เพื่อให้นักเรียน

3.3.1 มีส่วนร่วมในการตอบคำถามในชั้นเรียน

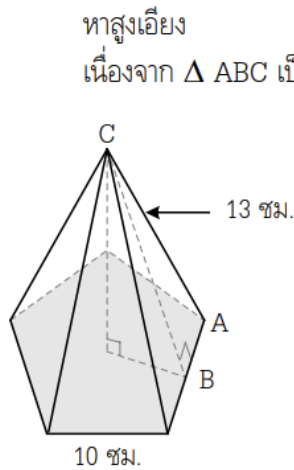
3.3.2 มีความตรงต่อเวลาในการเข้าชั้นเรียน และส่งงาน

3.3.3 มีความรับผิดชอบในการทำงานที่ได้รับมอบหมาย

## 4. สารการเรียนรู้

### พื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิด

ตัวอย่างที่ 15 จงหาพื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าซึ่งยาวด้านละ 10 เซนติเมตร ล้นพีระมิดยาว 13 เซนติเมตร



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$13^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + BC^2$$

$$BC^2 = 13^2 - 5^2$$

$$= 169 - 25$$

$$= 144$$

$$BC = \sqrt{144}$$

$$= 12 \text{ เซนติเมตร}$$

ทำให้ได้สูงเอียงเป็น 12 เซนติเมตร

เนื่องจากพีระมิดฐานห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ามีผิวข้างห้าหน้า แต่ละหน้าเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีพื้นที่เท่ากัน

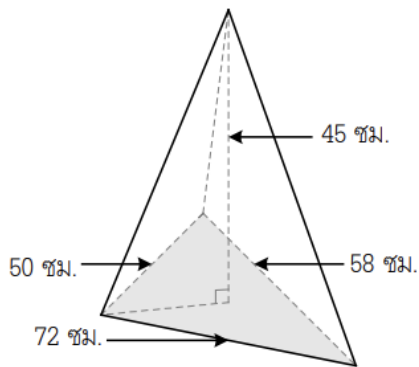
$$\text{ดังนั้น} \quad \text{พื้นที่ผิวข้างของพีระมิด} = 5 \times \left(\frac{1}{2} \times \text{ความยาวของฐาน} \times \text{สูงเอียง}\right)$$

$$= 5 \times \left(\frac{1}{2} \times 10 \times 12\right)$$

$$= 300 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$



ตัวอย่างที่ 16 พีระมิดฐานสามเหลี่ยมที่มีด้านยาว 50, 58 และ 72 เซนติเมตร จะมีปริมาตรเท่าใด ถ้าพีระมิดสูง 45 เซนติเมตร



$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ฐานของพีระมิด} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ \text{เมื่อ } s &= \frac{a+b+c}{2} \\ &= \frac{72+58+50}{2} = 90 \\ \therefore \text{พื้นที่ฐานของพีระมิด} &= \sqrt{90(90-72)(90-58)(90-50)} \\ &= 1,440 \text{ ตารางเซนติเมตร} \\ \therefore \text{ปริมาตรของพีระมิด} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูงตรง} \\ &= \frac{1}{3} \times 1,440 \times 45 \\ \therefore \text{ปริมาตรของพีระมิด} &= 21,600 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 17 พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวด้าน 5 เมตร สูง 6 เมตร จงหาพื้นที่ผิวทั้งหมดและปริมาตรของพีระมิดนี้

จากโจทย์ พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวด้าน 5 เมตร สูง 6 เมตร

$$\begin{aligned} \text{จึงได้ว่าปริมาตร} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง} \\ &= \frac{1}{3} \times (5 \times 5) \times 6 \\ &= 50 \text{ ลูกบาศก์เมตร} \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ผิว} &= \text{พื้นที่ฐาน} + \text{พื้นที่ผิวข้าง} \\ &= (5 \times 5) + 4 \left( \frac{1}{2} \times 5 \times 6.5 \right) \\ &= 25 + 65 \\ &= 90 \text{ ตารางเมตร} \blacksquare \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 18 พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 6 เมตร สูงตรง 4 เมตร จงหาปริมาตร และความยาวของสูงเอียงของพีระมิดนี้

จากโจทย์ พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวด้านละ 6 เมตร สูงตรง 4 เมตร

$$\begin{aligned} \text{จึงได้ว่าปริมาตร} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง} \\ &= \frac{1}{3} \times (6 \times 6) \times 4 \\ &= 48 \text{ ลูกบาศก์เมตร} \blacksquare \end{aligned}$$

$$l^2 = 4^2 + 3^2$$

$$l^2 = 25$$

$$l = 5 \text{ เมตร} \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 19 พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 20 นิ้ว และมีสูงเอียงยาว 24 นิ้ว จงหาความยาวสัน

จากโจทย์ พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวด้านละ 20 นิ้ว และมีสูงเอียงยาว 24 นิ้ว

$$\text{จึงได้ว่า} \quad \text{สัน}^2 = 24^2 + 10^2$$

$$\text{สัน}^2 = 676$$

$$\text{สัน} = 26 \text{ นิ้ว} \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 20 พีระมิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 10 เซนติเมตร และมีสันยาว 171 เซนติเมตร จงหาความสูงของพีระมิดนี้

จากโจทย์ พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวด้านละ 10 เซนติเมตร และมีสันยาว 171 เซนติเมตร

$$\text{จึงได้ว่า } h^2 + (5\sqrt{2})^2 = 171^2$$

$$h^2 + 50 = 29,241$$

$$h^2 = 29,191$$

$$h = \sqrt{29,191} \quad \text{เซนติเมตร} \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 21 พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 6 นิ้ว มีสันยาว 5 นิ้ว จงหาพื้นที่ผิวทั้งหมดและปริมาตรของพีระมิดนี้

จากโจทย์ พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวด้านละ 6 นิ้ว มีสันยาว 5 นิ้ว

ทำให้ได้ว่า สูงเอียงยาว 4 นิ้ว และ สูงตรงยาว  $\sqrt{7}$  นิ้ว

$$\text{ดังนั้น ปริมาตร} = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง}$$

$$= \frac{1}{3} \times (6 \times 6) \times \sqrt{7}$$

$$= 12\sqrt{7} \text{ ลูกบาศก์นิ้ว} \quad \blacksquare$$

$$\text{พื้นที่ผิว} = \text{พื้นที่ฐาน} + \text{พื้นที่ผิวข้าง}$$

$$= (6 \times 6) + 4 \left( \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \right)$$

$$= 36 + 48$$

$$= 84 \text{ ตารางนิ้ว} \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 22 พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 16 หน่วย มีปริมาตร 1,280 ลูกบาศก์หน่วย จงหาความยาวสูงตรงและสูงเอียงของพีระมิดนี้

จากโจทย์ พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวด้านละ 16 หน่วย มีปริมาตร 1,280 ลูกบาศก์หน่วย

$$\text{ทำให้ ปริมาตร} = \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง}$$

$$1,280 = \frac{1}{3} \times (16 \times 16) \times h$$

$$h = 15 \text{ หน่วย} \quad \blacksquare$$

$$l^2 = 15^2 + 8^2$$

$$l^2 = 289$$

$$l = 17 \text{ หน่วย} \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 23 พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 10 นิ้ว มีพื้นที่ผิวทั้งหมด 340 ตารางนิ้ว จงหาความยาวสันของพีระมิดนี้

จากโจทย์ พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวด้านละ 10 นิ้ว มีพื้นที่ผิวทั้งหมด 340 ตารางนิ้ว

เนื่องจาก  $\text{พื้นที่ผิว} = \text{พื้นที่ฐาน} + \text{พื้นที่ผิวข้าง}$

$$340 = (10 \times 10) + \text{พื้นที่ผิวข้าง}$$

$$\text{พื้นที่ผิวข้าง} = 240 \quad \text{ตารางนิ้ว}$$

$$4\left(\frac{1}{2} \times 10 \times l\right) = 240$$

$$l = 12 \quad \text{นิ้ว}$$

ดังนั้น

$$\text{เส้น}^2 = 5^2 + 12^2$$

$$\text{เส้น}^2 = 169$$

$$\text{เส้น} = 13 \quad \text{นิ้ว} \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 24.1 พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง 12 เมตร ยาว 30 เมตร และสูง 8 เมตร จงหาพื้นที่ผิวทั้งหมดและปริมาตรของพีระมิดนี้

จากโจทย์ พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง 12 เมตร ยาว 30 เมตร และสูง 8 เมตร

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น ปริมาตร} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง} & \text{พื้นที่ผิว} &= \text{พื้นที่ฐาน} + \text{พื้นที่ผิวข้าง} \\ &= \frac{1}{3} \times (12 \times 30) \times 8 & &= (12 \times 30) + 2\left(\frac{1}{2} \times 12 \times 17\right) + 2\left(\frac{1}{2} \times 10 \times 30\right) \\ &= 960 \text{ ลูกบาศก์เมตร} \quad \blacksquare & &= 360 + 204 + 300 \\ & & &= 864 \text{ ตารางเมตร} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 24.2 พีระมิดฐานสามเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ามีความยาวฐาน 5 เซนติเมตร สูงเอียง 6 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ผิวข้าง

จากโจทย์ พีระมิดฐานสามเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ามีความยาวฐาน 5 เซนติเมตร สูงเอียง 6 เซนติเมตร

$$\begin{aligned} \text{จึงได้ว่า} \quad \text{พื้นที่ผิวข้าง} &= 3\left(\frac{1}{2} \times 5 \times 6\right) \\ &= 45 \quad \text{ตารางเซนติเมตร} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 25 พีระมิดฐานหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ามีความยาวด้านละ 6 นิ้ว เส้นของพีระมิดนี้ยาว  $\sqrt{91}$  นิ้ว จงหาพื้นที่ผิวทั้งหมดและปริมาตรของพีระมิดนี้

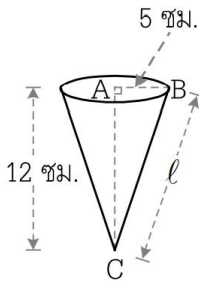
จากโจทย์ พีระมิดฐานหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ามีความยาวด้านละ 6 นิ้ว เส้นยาว  $\sqrt{91}$  นิ้ว

ทำให้ได้ว่า สูงเอียงยาว 9 นิ้ว และ สูงตรงยาว  $3\sqrt{6}$  นิ้ว

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \text{พื้นที่ผิว} &= \text{พื้นที่ฐาน} + \text{พื้นที่ผิวข้าง} & \text{ปริมาตร} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง} \\ &= \left(\frac{6\sqrt{3}}{4} \times 6^2\right) + 6\left(\frac{1}{2} \times 6 \times 9\right) & &= \frac{1}{3} \times 54\sqrt{3} \times 3\sqrt{6} \\ &= 54\sqrt{3} + 62 \text{ ตารางนิ้ว} \quad \blacksquare & &= 162\sqrt{2} \text{ ลูกบาศก์นิ้ว} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## พื้นที่ผิวและปริมาตรของกรวย

ตัวอย่างที่ 26 จะต้องใช้กระดาษกี่ตารางเซนติเมตรในการทำถ้วยกระดาษรูปกรวยสำหรับดื่มน้ำ รัศมีปากถ้วย 5 เซนติเมตร สูง 12 เซนติเมตร (ไม่คิดรอยต่อ)



$$\begin{aligned} \text{หาสูงเอียง} \quad BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 5^2 + 12^2 \\ &= 25 + 144 = 169 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

ทำให้ได้สูงเอียงเป็น  $l = 13$  เซนติเมตร

$$\therefore \text{พื้นที่ผิวข้างของกรวย} = \pi r l$$

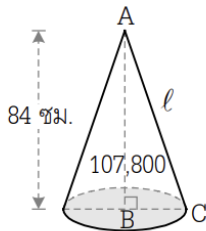
$$\therefore \text{จะต้องใช้กระดาษในการทำถ้วยกระดาษ} \approx \frac{22}{7} \times 5 \times 13$$

$$\approx 204.3 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

ตัวอย่างที่ 27 กรวยตรงอันหนึ่งมีปริมาตร 107,800 ลูกบาศก์นิ้ว สูง 84 นิ้ว จงหา

1. หาพื้นที่ฐานของกรวย

1. พื้นที่ฐานของกรวย
2. สูงเอียง



$$\therefore \text{ปริมาตรของกรวย} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$107,800 \approx \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times r^2 \times 84$$

$$r^2 \approx \frac{107,800 \times 3 \times 7}{22 \times 84}$$

$$\approx 1,225$$

$$r \approx \sqrt{1,225}$$

$$\approx 35$$

$$\therefore \text{พื้นที่วงกลม} = \pi r^2$$

$$\approx \frac{22}{7} \times 35 \times 35$$

$$\approx 3,850$$

$$\therefore \text{พื้นที่ฐานของกรวย} \approx 3,850 \text{ ตารางนิ้ว}$$

2. หาสูงเอียงของกรวย

ให้  $l$  เป็นสูงเอียงของกรวย

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$l^2 = 84^2 + 35^2$$

$$= 7,056 + 1,225$$

$$= 8,281$$

$$l = \sqrt{8,281}$$

$$= 91$$

$$\therefore \text{สูงเอียงของกรวย} = 91 \text{ นิ้ว}$$

ตัวอย่างที่ 28 กรวยอันหนึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางฐานยาว 7 นิ้วและสูง 12 นิ้ว จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของกรวยนี้  
จากโจทย์ กรวยมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 7 นิ้วและสูง 12 นิ้ว

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พื้นที่ผิว} &= \pi r^2 + \pi r l \\ &= \left( \frac{22}{7} \times \left( \frac{7}{2} \right)^2 \right) + \left( \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{25}{2} \right) \\ &= 176 \text{ ตารางนิ้ว} \quad \blacksquare \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{ปริมาตร} &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \left( \frac{7}{2} \right)^2 \times 12 \\ &= 154 \text{ ลูกบาศก์นิ้ว} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 29 กรวยอันหนึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 14 เมตร สูง 24 เมตร จงหาความยาวสูงเอียงและพื้นที่ผิวข้างของกรวยนี้

$$\begin{aligned} \text{จากโจทย์ กรวยมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 14 เมตร สูง 24 เมตร} \\ \text{ดังนั้น} \quad l^2 &= 7^2 + 24^2 & \text{พื้นที่ผิวข้าง} &= \pi r l \\ l^2 &= 625 & &= \frac{22}{7} \times 7 \times 25 \\ l &= 25 \text{ เมตร} \quad \blacksquare & &= 550 \text{ ตารางเมตร} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 30 กรวยหนึ่งมีความสูง 8 นิ้ว มีความยาวสูงเอียง 10 นิ้ว จงหาปริมาตร และ พื้นที่ผิวทั้งหมดของกรวยนี้ (ตอบในรูปค่า  $\pi$ )

$$\begin{aligned} \text{จากโจทย์ กรวยมีความสูง 8 นิ้ว มีความยาวสูงเอียง 10 นิ้ว จึงได้ว่า } r &= 6 \\ \text{ดังนั้น พื้นที่ผิว} &= \pi r^2 + \pi r l & \text{ปริมาตร} &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ &= (\pi \times 6^2) + (\pi \times 6 \times 10) & &= \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8 \\ &= 96 \pi \text{ ตารางนิ้ว} \quad \blacksquare & &= 96 \pi \text{ ลูกบาศก์นิ้ว} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 31 นำแก้วน้ำกระต่ายรูปกรวยรัศมี 7 เซนติเมตร สูง 3 เซนติเมตร ตักน้ำใส่ถึงน้ำทรงกระบอกรัศมี 7 เซนติเมตร สูง 6 เซนติเมตรกี่ครั้งถึงจะเต็ม

$$\begin{aligned} \text{จากโจทย์ กรวยรัศมี 7 เซนติเมตร สูง 3 เซนติเมตร} \\ \text{และ ทรงกระบอกรัศมี 7 เซนติเมตร สูง 6 เซนติเมตร} \\ \text{จึงได้ว่า ปริมาตรกรวย} &= \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times 7^2 \times 3 = 49 \pi \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \\ \text{และ ปริมาตรทรงกระบอก} &= \pi r^2 h = \pi \times 7^2 \times 6 = 49 \pi \times 6 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \\ \text{ดังนั้น ตักน้ำใส่ถึงน้ำทรงกระบอก} &= \frac{\text{ปริมาตรทรงกระบอก}}{\text{ปริมาตรกรวย}} = \frac{49 \pi \times 6}{49 \pi} = 6 \text{ ครั้ง} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

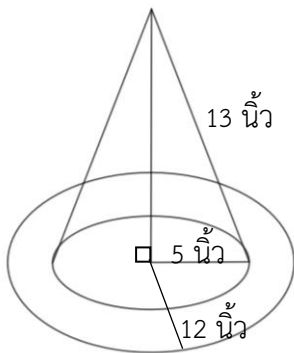
ตัวอย่างที่ 32 กรวยอันหนึ่งมีเส้นรอบวงยาว  $16\pi$  เซนติเมตร สูงตรง 15 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของกรวย (ตอบในรูปค่า  $\pi$ )

จากโจทย์ กรวยมีเส้นรอบวงยาว  $16\pi$  เซนติเมตร สูงตรง 15 เซนติเมตร จึงได้ว่า  $r = 8$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พื้นที่ผิว} &= \pi r^2 + \pi r l \\ &= (\pi \times 8^2) + (\pi \times 8 \times 17) \\ &= 200\pi \text{ ตารางเซนติเมตร} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตร} &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times 8^2 \times 15 \\ &= 320\pi \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 33 หมวกใบหนึ่งมีลักษณะดังรูป จงหาพื้นที่ผิวภายนอกของหมวกนี้ (ตอบในรูปค่า  $\pi$ )



$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ผิวภายนอกของหมวก} &= \text{พื้นที่ผิวข้างกรวย} + \text{พื้นที่วงแหวน} \\ &= \pi r l + \pi(R^2 - r^2) \\ &= (\pi \times 5 \times 13) + \pi(12^2 - 5^2) \\ &= 184\pi \text{ ตารางนิ้ว} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 34 กรวยอันหนึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 12 เซนติเมตร สูง 24 เซนติเมตร ถูกตัดแบ่งเป็นสองส่วนในระนาบที่ขนานกับฐาน ที่ระดับความสูงสองในสามของความสูงจากระดับฐาน จงหาว่าส่วนยอดที่ตัดออกมีปริมาตรน้อยกว่าส่วนที่เหลือกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร (ตอบในรูปค่า  $\pi$ )

จากโจทย์ กรวยมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 12 และ สูง 24 เซนติเมตร ถูกตัดแบ่งสองในสามของความสูงจากระดับฐาน

$$\text{จึงได้ว่า } V_{\text{ทั้งหมด}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} \pi \times 6^2 \times 24 = 288\pi \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

$$V_{\text{ที่ตัดออก}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 8 = \frac{32\pi}{3} \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

$$V_{\text{ที่เหลือ}} = 288\pi - \frac{32\pi}{3} = \frac{832\pi}{3} \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

$$\text{ดังนั้น ส่วนยอดที่ตัดออกมีปริมาตรน้อยกว่าส่วนที่เหลือ} = \frac{832\pi}{3} - \frac{32\pi}{3} = \frac{800\pi}{3} \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} \quad \blacksquare$$

ตัวอย่างที่ 35 กรวยใบตองจำนวน 150 ชิ้น ใส่ขนมกล้วยได้ 1,100 ลูกบาศก์เซนติเมตร และกรวยสูง 7 เซนติเมตร เส้นผ่านศูนย์กลางของกรวยจะยาวเท่ากับกี่เซนติเมตร

จากโจทย์ กรวยใบตองจำนวน 150 ชิ้น ใส่ขนมกล้วยได้ 1,100 ลูกบาศก์เซนติเมตร

จึงได้ว่า กรวยใบตองจำนวน 1 ชิ้น ใส่ขนมกล้วยได้  $\frac{1,100}{150} = \frac{22}{3}$  ลูกบาศก์เซนติเมตร

$$\begin{aligned} \text{พิจารณา} \quad \text{ปริมาตรกรวย} &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ \frac{22}{3} &= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times r^2 \times 7 \\ r^2 &= 1 \\ r &= 1 \\ d &= 2 \quad \text{เซนติเมตร} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 36 กระจาดรูปวงกลมมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 42 เซนติเมตร นำมาตัดตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางให้ได้ 4 ส่วนเท่า ๆ กัน แล้วนำแต่ละส่วนมาทำเป็นกรวยกลม จงหรัศมีของกรวยกลมแต่ละอัน

จากโจทย์ กระจาดรูปวงกลมมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 42 เซนติเมตร จะได้ว่า  $R = 21$

นำมาตัดตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางให้ได้ 4 ส่วนเท่า ๆ กัน

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า} \quad 2\pi R &= 4(2\pi r) \\ r &= \frac{2\pi R}{8\pi} \\ &= \frac{21}{4} \\ &= 5.25 \quad \text{เซนติเมตร} \end{aligned}$$

## 5. กระบวนการจัดการเรียนรู้

### 5.1 ขั้นนำ (10 นาที)

5.1.1 ครูกล่าวทักทายนักเรียน

5.1.2 ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับการหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของปริซึมและทรงกระบอก เพื่อใช้ในการศึกษาต่อในเรื่องพื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิดและกรวย โดยถามกระตุ้น คือ

- สูตรการหาพื้นที่ผิวของปริซึม คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า  $(2 \times \text{พื้นที่หน้าตัด}) + \text{พื้นที่ผิวข้าง}$ ]

- สูตรการหาปริมาตรของปริซึม คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า  $\text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง}$ ]

- สูตรการหาพื้นที่ผิวของทรงกระบอก คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า  $2\pi r^2 + 2\pi rh$ ]

- สูตรการหาปริมาตรของทรงกระบอก คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า  $\pi r^2 h$ ]

## 5.2 ชั้นสอน (80 นาที)

5.2.1 ครูอธิบายบทนิยามของพีระมิดและส่วนประกอบต่าง ๆ ของพีระมิด

5.2.2 ครูให้นักเรียนสังเกตรูปร่างของพีระมิด แล้วถามคำถามกระตุ้น คือ

- นักเรียนคิดว่า บริเวณด้านข้างแต่ละด้านของพีระมิดเป็นรูปเรขาคณิตอะไร

[นักเรียนควรตอบว่า รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว]

- นักเรียนคิดว่า พีระมิดฐาน  $n$  เหลี่ยม จะมีรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วทั้งหมดกี่รูป

[นักเรียนควรตอบว่า  $n$  รูป]

- นักเรียนคิดว่า เราจะหาพื้นที่ผิวทั้งหมดของพีระมิดได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า ผลรวมของพื้นที่ฐานและพื้นที่ผิวข้าง]

5.2.3 ครูอธิบายสูตรการหาพื้นที่ผิวของพีระมิด คือ พื้นฐาน + พื้นที่ผิวข้าง

5.2.4 ครูให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ของปริมาตรระหว่างพีระมิดและปริซึม ที่มีฐานขนาดเท่ากัน บนเว็บไซต์ GeoGebra แล้วถามคำถามกระตุ้น คือ

- นักเรียนคิดว่า ถ้าเติมน้ำจากพีระมิดลงไปในปริซึมที่มีฐานเท่ากันแล้ว ต้องเติมน้ำอย่างน้อยกี่ครั้งถึงจะเต็ม

[นักเรียนควรตอบว่า 3 ครั้ง]

- นักเรียนคิดว่า อัตราส่วนของปริมาตรพีระมิดต่อปริมาตรปริซึมเป็นอย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า ปริมาตรเป็น 1 ใน 3 ของปริซึม]

5.2.5 ครูอธิบายสูตรการหาปริมาตรของพีระมิด คือ  $\frac{1}{3} \times$  พื้นฐาน  $\times$  สูง

5.2.6 ครูยกตัวอย่างที่ 15 ซึ่งเกี่ยวกับการหาพื้นที่ผิวข้างของพีระมิดฐานห้าเหลี่ยมด้านเท่าเมื่อกำหนดความยาวฐาน และสันมาให้ แล้วถามคำถามกระตุ้น คือ

- นักเรียนคิดว่า เราจะหาความสูงของพีระมิดได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า พีทาโกรัส]

ครูอธิบายวิธีทำ และตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนทุกครั้งก่อนจะอธิบายตัวอย่างถัดไป

5.2.7 ครูยกตัวอย่างที่ 16 ซึ่งเกี่ยวกับการหาปริมาตรของพีระมิดฐานสามเหลี่ยม เมื่อกำหนดด้านแต่ละด้าน และความสูงมาให้ ครูอธิบายวิธีทำโดยละเอียดโดยใช้วิธีถามตอบประกอบการอธิบาย และครูตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนทุกครั้งเมื่อเฉลยเสร็จ

5.2.8 ครูให้นักเรียนทำตัวอย่างที่ 17 ด้วยตนเองเป็นเวลา 5 นาที จากนั้นนักเรียนและครูร่วมกันเฉลยคำตอบและวิธีการหาคำตอบ

5.2.9 ครูยกตัวอย่างที่ 20 ซึ่งเกี่ยวกับการหาความสูงของพีระมิด จากสิ่งที่กำหนดให้ ครูอธิบายวิธีทำโดยละเอียดโดยใช้วิธีถามตอบประกอบการอธิบาย และครูตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนทุกครั้งเมื่อเฉลยเสร็จ

5.2.10 ครูอธิบายบทนิยามของกรวยและส่วนประกอบต่าง ๆ ของกรวย

5.2.11 ครูให้นักเรียนสังเกตรูปร่างของกรวย แล้วถามคำถามกระตุ้น คือ

- นักเรียนคิดว่า ด้านข้างของกรวยที่คลี่ออกมาเป็นรูปเรขาคณิตอะไร

[นักเรียนควรตอบว่า รูปสามเหลี่ยมฐานโค้ง 1 รูป]

- นักเรียนคิดว่า จะหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมฐานโค้งนี้ได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า  $\pi r l$ ]

- นักเรียนคิดว่า เราจะหาพื้นที่ผิวทั้งหมดของกรวยได้อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า พื้นที่ฐานวงกลม 1 วง และพื้นที่ผิวข้าง]

5.2.12 ครูอธิบายสูตรการหาพื้นที่ผิวของกรวย คือ  $\pi r^2 + \pi r l$

5.2.13 ครูให้นักเรียนสังเกตความสัมพันธ์ของปริมาตรระหว่างกรวยและทรงกระบอก ที่มีฐานขนาดเท่ากัน บนเว็บไซต์ GeoGebra แล้วถามคำถามกระตุ้น คือ

- นักเรียนคิดว่า ถ้าเติมน้ำจากกรวยลงไปในทรงกระบอกที่มีฐานเท่ากันแล้ว ต้องเติมน้ำอย่างน้อยกี่ครั้งถึงจะเต็ม

[นักเรียนควรตอบว่า 3 ครั้ง]

- นักเรียนคิดว่า อัตราส่วนของปริมาตรกรวยต่อปริมาตรทรงกระบอกเป็นอย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า ปริมาตรเป็น 1 ใน 3 ของทรงกระบอก]

5.2.14 ครูอธิบายสูตรการหาปริมาตรของทรงกระบอก คือ  $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

5.2.15 ครูยกตัวอย่างที่ 26 ซึ่งเกี่ยวกับการหาพื้นที่ผิวข้างของกรวย จากสิ่งที่กำหนดให้ ครูอธิบายวิธีทำโดยละเอียดโดยใช้วิธีถามตอบประกอบการอธิบาย และครูตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนทุกครั้งก่อนจะอธิบายตัวอย่างถัดไป

5.2.16 ครูยกตัวอย่างที่ 27 ซึ่งเกี่ยวกับการหาพื้นที่ฐานของกรวยและความสูงเอียง เมื่อกำหนดปริมาตร และความสูงมาให้ ครูอธิบายวิธีทำโดยละเอียดโดยใช้วิธีถามตอบประกอบการอธิบาย และครูตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนทุกครั้งก่อนจะอธิบายตัวอย่างถัดไป

5.2.17 ครูยกตัวอย่างที่ 28 ซึ่งเกี่ยวกับการหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของกรวย เมื่อกำหนดเส้นผ่านศูนย์กลาง และความสูงมาให้ ครูอธิบายวิธีทำโดยละเอียดโดยใช้วิธีถามตอบประกอบการอธิบาย และครูตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนทุกครั้งเมื่อเฉลยเสร็จ

5.2.18 ครูให้นักเรียนทำตัวอย่างที่ 29 ด้วยตนเองเป็นเวลา 5 นาที จากนั้นนักเรียนและครูร่วมกันเฉลยคำตอบและวิธีการหาคำตอบ

5.2.19 ครูยกตัวอย่างที่ 33 ซึ่งเกี่ยวกับการหาพื้นที่ผิวภายนอกของหมวก จากสิ่งที่กำหนดให้ แล้วถามคำถามกระตุ้น คือ

- นักเรียนคิดว่า พื้นที่ผิวภายนอกของหมวกคือบริเวณใดบ้าง

[นักเรียนควรตอบว่า พื้นที่ผิวข้างกรวยและพื้นที่วงแหวน]

ครูอธิบายวิธีทำ และตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนทุกครั้งก่อนจะอธิบายตัวอย่างถัดไป

5.2.20 ครูยกตัวอย่างที่ 34 ซึ่งเกี่ยวกับการหาปริมาตรของกรวยยอดตัด ว่าส่วนยอดที่ตัดออกมีปริมาตรน้อยกว่าส่วนที่เหลือเท่าใด จากสิ่งที่กำหนดให้ ครูอธิบายวิธีทำโดยละเอียดโดยใช้วิธีถามตอบประกอบการอธิบาย และครูตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนทุกครั้งก่อนจะอธิบายตัวอย่างถัดไป

5.2.21 ครูยกตัวอย่างที่ 35 ซึ่งเกี่ยวกับการหาเส้นผ่านศูนย์กลางของกรวย จากสิ่งที่กำหนดให้ ครูอธิบายวิธีทำโดยละเอียดโดยใช้วิธีถามตอบประกอบการอธิบาย และครูตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนทุกครั้งก่อนจะอธิบายตัวอย่างถัดไป

5.2.22 ครูยกตัวอย่างที่ 36 ซึ่งเกี่ยวกับการหารัศมีของกรวยกลมที่เกิดจากการนำกระดาษรูปวงกลมนำมาตัดตามแนวเส้นผ่านศูนย์กลางให้ได้ 4 ส่วนเท่า ๆ กัน เมื่อกำหนดเส้นผ่านศูนย์กลางของกระดาษมาให้ แล้วถามคำถามกระตุ้น คือ

- นักเรียนคิดว่า เส้นรอบวงที่ฐานของกรวยเล็กมีความสัมพันธ์กับเส้นรอบวงที่ฐานของกรวยใหญ่อย่างไร

[นักเรียนควรตอบว่า  $2\pi r = \frac{1}{4}(2\pi R)$ ]

ครูอธิบายวิธีทำ และตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนทุกครั้งเมื่อเฉลยเสร็จ

### 5.3 ชั้นสรุป (5 นาที)

5.3.1 นักเรียนสรุปความรู้เกี่ยวกับการหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิดและกรวย โดยครูถามนักเรียนว่า

- สูตรการหาพื้นที่ผิวของพีระมิด คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า พื้นที่ฐาน + พื้นที่ผิวข้าง ]

- สูตรการหาปริมาตรของพีระมิด คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า  $\frac{1}{3} \times$  พื้นที่ฐาน  $\times$  สูง]

- สูตรการหาพื้นที่ผิวของกรวย คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า  $\pi r^2 + \pi r l$  ]

- สูตรการหาปริมาตรของกรวย คืออะไร

[นักเรียนควรตอบว่า  $\frac{1}{3} \pi r^2 h$  ]

5.3.2 ครอบคลุมรายงาน แบบฝึกหัดทบทวน เรื่อง ทักษะและกระบวนการพื้นที่ผิวและปริมาตร

หน้า 11 - 18

**6. สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้**

6.1 เอกสารประกอบการเรียนการสอน เรื่อง ทักษะและกระบวนการพื้นที่ผิวและปริมาตร

6.2 สื่อ GeoGebra เรื่อง Volume of Prism Pyramid

6.3 สื่อ GeoGebra เรื่อง Volume of Cylinder Cone

**7. ภาระงาน / ชิ้นงาน**

แบบฝึกหัดทบทวน เรื่อง ทักษะและกระบวนการพื้นที่ผิวและปริมาตร หน้า 11 – 18

## 8. การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้

เพื่อให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ในคาบนี้ มีดังนี้

จุดประสงค์การเรียนรู้ ที่ต้องการวัดผลและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
<p><b>ด้านความรู้ทางคณิตศาสตร์ :</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>นักเรียนสามารถหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิดได้</li> <li>นักเรียนสามารถหาพื้นที่ผิวและปริมาตรของกรวยได้</li> </ol>	<p><b>วิธีวัดผล :</b></p> <p>พิจารณาจากการตอบคำถามตัวอย่างในชั้นเรียน และการทำแบบฝึกหัด</p> <p><b>เครื่องมือวัดผล :</b></p> <p>เอกสารประกอบการเรียนการสอน เรื่อง ทักษะและกระบวนการพื้นที่ผิวและปริมาตร</p>	<p><b>เกณฑ์การให้คะแนน :</b></p> <p>ในแต่ละข้อคำถาม ถ้านักเรียนตอบถูกต้อง จะได้ 1 คะแนน ถ้านักเรียนตอบไม่ถูกต้อง จะได้ 0 คะแนน</p> <p><b>เกณฑ์การประเมินผล :</b></p> <p>ถ้า นักเรียนได้คะแนนมากกว่า 5 คะแนน ถือว่าผ่าน</p>
<p><b>ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ :</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>สื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาเกี่ยวกับพื้นที่ผิวและปริมาตรของรูปทรงที่กำหนดให้ได้</li> </ol>	<p><b>วิธีวัดผล :</b></p> <p>พิจารณาจากการตอบคำถามตัวอย่างในชั้นเรียน และการทำใบงาน</p> <p><b>เครื่องมือวัดผล :</b></p> <p>เอกสารประกอบการเรียนการสอน เรื่อง ทักษะและกระบวนการพื้นที่ผิวและปริมาตร</p>	<p><b>เกณฑ์การให้คะแนน :</b></p> <p>ในแต่ละข้อคำถาม ถ้านักเรียนแสดงวิธีการหาคำตอบได้ถูกต้อง จะได้ 1 คะแนน ถ้านักเรียนแสดงวิธีการหาคำตอบได้ไม่ถูกต้อง จะได้ 0 คะแนน</p> <p><b>เกณฑ์การประเมินผล :</b></p> <p>ถ้า นักเรียนได้คะแนนมากกว่า 5 คะแนนถือว่าผ่าน</p>

จุดประสงค์การเรียนรู้ ที่ต้องการวัดผลและประเมินผล	การวัดผล	การประเมินผล
<p><b>ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์ :</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. มีส่วนร่วมในการตอบคำถามในชั้นเรียน</li> <li>2. มีความตรงต่อเวลาในการเข้าชั้นเรียน</li> <li>3. มีความรับผิดชอบในการทำงานที่ได้รับมอบหมาย</li> </ol>	<p><b>วิธีวัดผล :</b></p> <p>พิจารณาพฤติกรรมหรือการตอบคำถามในชั้นเรียน หรือทำงานที่ได้รับมอบหมาย ตามแบบสังเกตพฤติกรรมการทำงาน ของนักเรียน</p> <p><b>เครื่องมือวัดผล :</b></p> <p>แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงาน ของนักเรียน</p>	<p><b>เกณฑ์การให้คะแนน :</b></p> <p>ในแต่ละข้อของแบบสังเกตพฤติกรรม</p> <p>ถ้านักเรียนแสดงออกอย่างเห็นได้ชัด จะได้ 2 คะแนน</p> <p>ถ้านักเรียนแสดงออกเพียงเล็กน้อย จะได้ 1 คะแนน</p> <p>ถ้านักเรียนไม่แสดงออกเลย จะได้ 0 คะแนน</p> <p><b>เกณฑ์การประเมินผล :</b></p> <p>ถ้านักเรียนได้คะแนนมากกว่า 2 คะแนนถือว่าผ่าน</p>

9. สรุปผลการจัดการเรียนรู้

1.1 บันทึกผลการจัดการเรียนรู้

สมรรถนะการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์

.....

.....

.....

.....

.....

1.2 ปัญหา/อุปสรรค และแนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

1.3 ข้อเสนอแนะ

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้สอน

(นางสาวนนทพร สถาพรพิทักษ์)

...../...../.....

10. ความเห็นของผู้ที่ได้รับมอบหมาย

10.1 ความเห็นของอาจารย์พี่เลี้ยง

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10.2 ความเห็นของอาจารย์นิเทศก์

.....

.....

.....

.....

.....

**แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานของนักเรียน**

วันที่ : ..... เวลา .....

ชื่อกิจกรรม: .....

การให้คะแนน : ถ้าแสดงพฤติกรรมให้เห็นอย่างเด่นชัด      จะได้คะแนน                      2 คะแนน  
 ถ้าแสดงพฤติกรรมให้เห็นเพียงเล็กน้อย      จะได้คะแนน                      1 คะแนน  
 ถ้าไม่แสดงพฤติกรรมเลย                      จะได้คะแนน                      0 คะแนน

เลขที่	ชื่อ - สกุล	พฤติกรรมที่ต้องการวัดผลและประเมินผล		
		มีส่วนร่วมในกิจกรรม การเรียนรู้ในชั้นเรียน	มีความรับผิดชอบ ในงานที่มอบหมาย	มีความตรงต่อเวลา ในการเข้าชั้นเรียน และการส่งงาน
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

หมายเหตุ : มีนักเรียนทั้งหมด 33 คน